一、（3分）（1）写出“收敛”的定义.（2）设, 且. 用(1)中的定义证明: 若收敛, 则收敛.

(1) 令, 如果存在, 则称收敛.

(2). 又令. 则, 且均为单增数列. 由单调数列有极限推出有解, 及收敛, 知有界. 从而有界. 再有单调有界推出有极限, 知有极限. 从而收敛.

二、（3分）（1）写出正项级数的达朗贝尔判别法和柯西判别法. （3）求一个正项级数, 可由柯西判别法判定它为收敛, 但不能用达朗贝尔判别法判定它为收敛.

(1) 略

(2) 令  
则，由柯西判别式收敛

但，不能由达朗贝尔推出收敛

三、（3分） 判断下列级数的敛散性: （1）; （2）

(1). (用比较判别法的极限形式)

从而，由发散，知发散.

(2) 由Raabe判别法

故收敛.

四、（3分）（1）写出“函数序列在区间上一致收敛于”的定义. （2）证明在区间上一致收敛, 但在区间上不一致收敛.

，使

(2) 记 则

故

故

五、（3分）(1) 写出和差变换(Abel变换)公式. (2) 设存在, 收敛, 证明收敛.

(1) 记，则

(2) 由

故

因此结论成立

.

六、（3分） 设: (1) 函数序列在开区间上一致收敛于; (2) . 证明: (1) 存在; (2) 存在, 且.

(1) 由一致收敛的Cauchy准则

使

不等式两边取极限，由极限保序性

故数列是Cauchy列，故收敛；

(2) 由一致收敛的定义

使

不等式两边分别取和，知

再令，故知.同理

七、（3分） 求幂级数  
的收敛半径和收敛域.

且 。故

故收敛半径为

当时，都不是无穷小量，

故收敛为。

八、（3分）求幂级数  
的和函数.

由知收敛半径为1。

两端点处显然不收敛，故和函数定义域为  
，在(或)上一致收敛，故和可以交换次序：

故

九、（3分）（1）设. 写出“是的聚点”的定义. (2) 写出

中开集和闭集的定义.

(1)

(2) 称为开集，如果,使

称为闭集，如果若存在,则

十、（3分). (1) 写出二元函数在点处连续的定义. (2) 用定义证明在点处连续.

(1)

(2)

限制，则

从而

，取

则当时，